

1 Числовые выражения и выражения с переменными

1.1 Основные задачи

Задача 1. Вычислите наиболее удобным для вас способом: а) $16 \cdot 48 \cdot 625 \cdot 625$; б) $\frac{12 \cdot 27 \cdot 77}{63 \cdot 44 \cdot 45}$.

Задача 2. Вычислите устно:

а) $1234 \cdot 1234 - 1234 \cdot 234$;

в) $1999 \cdot 17 - 20 \cdot 16 + 20 \cdot 17 - 1999 \cdot 16$;

б) $1287 \cdot 1287 + 1287 \cdot 8713$;

г) $1465 \cdot 38 + 222 \cdot 19 - 1465 \cdot 37 - 111 \cdot 37$.

Задача 3. Упростите выражение $(\frac{2}{3}a - 1)(6b + 1) - (4 - 2a)(\frac{2}{3} - 2b)$ и найдите его значение при $a = 1,17, b = 0,83$.

Задача 4. Упростите выражение $(1 + xy)^2 - (1 - xy)^2$ и найдите значение этого выражения при $x = -8\frac{1}{3}, y = 12$.

1.2 Дополнительные задачи

Д1 При всех таких допустимых значениях переменных a и b , что $\frac{a}{b} = -\frac{5}{2}$, найдите значение дроби $\frac{5a - 3b}{3a + 7b}$.

Д2 Сравните $328819 \cdot 771843$ и $328818 \cdot 771844$.

2 Делимость чисел

2.1 Основные задачи

Задача 5. Найдите НОД чисел 60095 и 22321.

Задача 6. Найдите среди утверждений неверные и *приведите ним контрпримеры*.

а) Если число оканчивается на 2, то оно делится на 2.

б) Если число оканчивается на 4, то оно делится на 4.

в) Если число делится на 2 и на 5, то оно делится на 10.

г) Если число делится и на 6, и на 8, то оно делится на 48.

д) Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3.

е) Если число делится на 18, то и его сумма цифр делится на 18.

ж) Если сумма цифр числа делится на 27, то и число делится на 27.

2.2 Дополнительные задачи

Д3 Найдите наибольшее двузначное число, равное произведению двух простых чисел.

Д4 Докажите, что число $2019^3 - 1944^3$ делится на 25.

Д5 Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 12 при всех целых n .

3 Степень с натуральным показателем

3.1 Основные задачи

Задача 7. Что больше:

- | | | |
|--|------------------------------------|---|
| а) $2^5 + 2^5$ или 2^{10} ? | д) $3^5 \cdot 4^5$ или $12^{5^?}$ | и) $2^{10} \cdot 4^{30}$ или 8^{40} ? |
| б) $3^2 \cdot 4^2$ или $(3 \cdot 4)^2$? | е) $4^5 - 3^5$ или $(4 - 3)^{5^?}$ | к) $7^{10} \cdot 7^{20}$ или 7^{30} ? |
| в) $3^2 + 4^2$ или $(3 + 4)^2$? | ж) $30^9 : 15^9$ или $2^{9^?}$ | л) $2^{50} + 2^{50}$ или 2^{100} ? |
| г) $5^2 \cdot 3^4$ или 15^6 ? | з) $8^{19} : 4^9$ или $2^{10^?}$ | м) $4^{50} + 4^{50}$ или 4^{51} ? |

Задача 8. Запишите в виде степени с основанием 3 выражение $\frac{27^7 \cdot 9^7}{3^{13} \cdot 243}$.

Задача 9. Упростите выражение $\left(\frac{4a^{33}b^{25}}{a^{32}b^5}\right)^5$ и найдите его значение при $a = 0,5, b = -1$.

3.2 Дополнительные задачи

Д6 Известно, что $8 + 8 + \dots + 8 = 4^{24}$. Сколько слагаемых в этой сумме?

Д7 Перемножили 33 восьмёрки, 1 семёрку и 100 пятёрок. Найдите количество цифр и сумму цифр получившегося в результате числа.

Д8 Что больше: $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{100} ?

4 Линейные уравнения с одной переменной

4.1 Основные задачи

Задача 10. Решите уравнение: $\frac{5x + 4}{3} = \frac{9x - 2}{4}$.

Задача 11. Решите уравнение: $\frac{1}{2} - 2,7(1 - n) = 3(n + 0,8) - 1,6$.

Задача 12. Алиса показывает фокус. Просит каждого зрителя задумать число, умножить его на 12, прибавить 2, умножить результат на 3, прибавить 3, разделить результат на 9 и дважды вычесть исходное задуманное число. После этого все желающие сообщают Алисе свой результат и Алиса отгадывает задуманное число. Что загадал зритель, получивший число 3? А зрители, получившие 201 и 4039? А хитрый зритель, получивший число 0,4? Как Алисе удаётся быстро и безошибочно отгадывать ответ?

Задача 13. При каком значении a уравнение $2a - 5x = 3x + 2$ имеет корень, равный 1?

4.2 Дополнительные задачи

Д9 Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?

Д10 При каждом значении параметра a найдите число корней уравнения $a^2x + 1 = x + a$.

Д11 Ширину прямоугольника увеличили на 6 см и получили квадрат, площадь которого больше площади прямоугольника на 150 см^2 . Найти площадь прямоугольника.

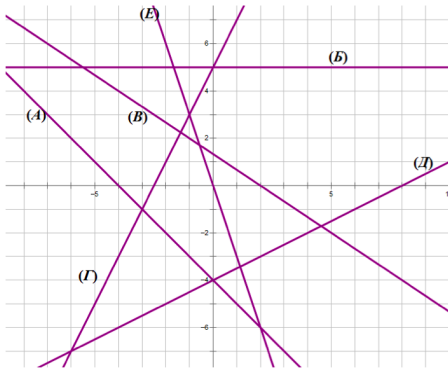
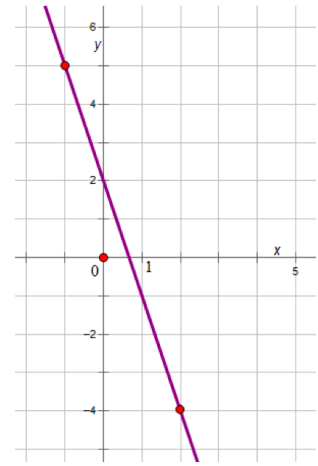
5 Функции. Линейная функция и её график

5.1 Основные задачи

Задача 14. Постройте график линейной функции $y = 2 + 4x$.

Задача 15. На рисунке представлен график линейной функции $f(x) = kx + b$. Используя график, найдите величины k и b .

Задача 16. На рисунке изображены графики шести линейных функций вида $f(x) = kx + b$ и типов (А), (Б), (В), (Г), (Д), (Е). Заполните таблицу, различая тип линейной функции в зависимости от знаков чисел k и b .



$k=0,$ $b>0$	$k<0,$ $b=0$	$k>0,$ $b>0$	$k>0,$ $b<0$	$k<0,$ $b>0$	$k<0,$ $b<0$

Задача 17. Дана функция $f(x) = -5x + 3$. Найдите следующие значения функции:

- а) $f(-1)$; б) $f(0)$; в) $f(f(1))$.

5.2 Дополнительные задачи

Д12 Через кран (а) в бак большого объёма поступает жидкость со скоростью 1 л/мин, а через кран (б) — со скоростью 2 л/мин. Через отверстие в дне бака жидкость вытекает со скоростью 4 л/мин.

а) Изобразите графически процесс заполнения бака жидкостью в течение 13 минут, обозначая через $v(t)$ количество литров жидкости в баке в момент времени t , используя следующую информацию.

- В момент $t = 0$ в баке 2 л жидкости.
- В момент $t = 0$ мгновенно открывают кран а, после чего
- В момент $t = 3$ ровно на 5 минут, не закрывая кран (а), открывают кран (б).
- Через 5 минут с момента открытия крана (а) открывают сливное отверстие.
- Через 8 минут с момента начала наблюдения оба крана и сливное отверстие мгновенно закрывают.

б) Сколько литров жидкости окажется в баке после истечения 13 минут?

в) Задайте зависимость $v(t)$ от времени t в течение 13 минут наблюдения в виде уравнений для задания кусочно-линейной функции.

Д13 Некоторая линейная функция в точке $x = a$ принимает значение $f(a)$, в точке $x = b$ — значение $f(b)$. Найдите значение функции f в точке $x = \frac{a + b}{2}$.

7 Формулы сокращённого умножения и разложение на множители

7.1 Основные задачи

Задача 27. Раскройте скобки и представьте ответ в стандартном виде

- а) $(7x + 3y)^2$;
б) $(0,5x - 1)^2$;
в) $(a + b)^2 - (a - b)^2 - 4ab$;
г) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) + 1$.

Задача 28. Вычислите с помощью разложения на множители:

- а) $\frac{2019}{7} \cdot 1520 - 9019 \cdot \frac{1520}{7}$; б) $247 \cdot 134 - 97 \cdot 166 - 134 \cdot 97 + 166 \cdot 247$. в) $1001^2 - 999^2$;

Задача 29. Дополните сумму одним слагаемым так, чтобы полученное выражение стало полным квадратом, сверните его и проверьте, раскрывая полный квадрат устно.

- а) $y^2 - 4y$; в) $a^2 + 16x^2$; д) $a^4 + b^4$;
б) $4a^2 + 9$; г) $10yz + 1$; е) $4r^4 + 6r^2(p - 1)$.

Задача 30. Разложите многочлен на множители.

- а) $6abz - 2az^4 - 4bz^2$; ж) $x^5 - x^4 - x + 1$;
б) $x^2 + 18x + 81$; з) $1000x^3 - 27$;
в) $2a(x + 5) + 4b(x + 5)$; и) $0,01a^2 - 0,6a + 9$;
г) $(x + 1)x + x^2 + 2x + 1$; к) $0,01a^2 - 0,6a + 8$;
д) $49 - b^2$; л) $a^3 + 8 + a^2 + 2a$;
е) $10pq - 15q + 2p - 3$; м) $64a^4 + ac^3$.

Задача 31. У Ани, Бори и Вити есть по одному картонному квадрату. Сторона Бориного квадрата на 3 см больше, чем сторона Витиноного, и на 3 см меньше, чем сторона Аниного. Площади Аниного и Витиноного квадратов отличаются на 60 см^2 . Найдите площадь Бориного квадрата.

Задача 32. Решите уравнение:

- а) $(x - 2)(3x + 1) = 0$; б) $8x^3 + 2x = 0$; в) $5x(x + 3) = 2(x + 3)$.

7.2 Дополнительные задачи

Д16 Про числа a, b, c известно, что $b^2 - ab - bc + ac > 0$. Может ли тогда выполняться неравенство $a < b < c$?

Д17 Какой из прямоугольников с периметром 400 имеет наибольшую площадь?

Д18 Найдите все пары целых x и y таких, что $xy - 3x - 2y = 95$.

Д19 Найдите все пары натуральных чисел, у которых сумма в три раза меньше произведения.

8 Системы линейных уравнений

8.1 Основные задачи

Задача 33. *Графически* решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

Задача 34. Без построения графиков найдите координаты общих точек двух прямых:

а) $y + 99 = 0$, $10x - 2y = 208$;

б) $x + y = 40$, $x - y = 200$;

в) $6x + y = 50$, $7x - y = 80$.

Задача 35. Решите системы уравнений

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 29, \\ 9x - 2y = 17. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 5y = -9, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9x + 8y = 21, \\ 6x + 4y = 13. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x - 3y = 8, \\ 4x + 9y = -24. \end{cases}$

Задача 36. Учитель предлагает ученику решить 16 задач, причём ученику будет засчитано по пять очков за каждую верно решённую задачу, а за каждую нерешённую задачу ученик потеряет три очка. Сколько задач решил ученик, если он не получил ни одного очка?

Задача 37. Велосипедист едет из А в В по дороге, содержащей подъёмы и спуски. Есть также ровные участки общей длины 28 км. На ровных участках его скорость равна 12 км/ч, на подъёмах — 8 км/ч, на спусках 15 км/ч. На дорогу из А в В велосипедист потратил 5 часов, а на обратный путь на 21 минуту меньше. Какова общая длина спусков по направлению из А в В? а подъёмов?

Задача 38. Найдите координаты точки пересечения прямых, если первая проходит через точки $(-1; 1)$ и $(1; 5)$, а вторая — $(-1; -6)$, $(3; 0)$.

Задача 39. Шоколадка и карамелька вместе стоят 72 рубля. Две карамельки и два леденца — 44 рубля. Три леденца и три шоколадки — 210 рублей. Сколько стоит одна шоколадка, одна карамелька и один леденец?

Задача 40. Один апельсин, два банана, три сливы и четыре дыни весят 10 кг 500 г. А четыре апельсина, три банана, две сливы и одна дыня весят 5 кг 500 г. Сколько весят апельсин, банан, слива и груша вместе?

8.2 Дополнительные задачи

Д20 Решите системы уравнений.

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ x - y + 4z = 4, \\ 2x + y + 5z = 8. \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x = y = z, \\ x - 2y + 3z = 4. \end{cases} \end{array} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 5. \end{cases}$$

Д21 Две различные прямые имеют уравнения:

$$ax + (3a - 1)y - b = 0, \quad bx + (3b + 1)y - a = 0.$$

Известно, что точка M — точка их пересечения. Найдите a и b , если

а) $M = (1, 1)$; **б)** $M = (3, -1)$; **в)** $M = (5, -2)$.

Д22 На базаре продаются рыбки, большие и маленькие. Сегодня три больших и одна маленькая стоят вместе столько же, сколько пять больших вчера. А две большие и одна маленькая сегодня стоят вместе столько же, сколько три больших и одна маленькая вчера. Можно ли по этим данным выяснить, что дороже: одна большая и две маленьких сегодня, или пять маленьких вчера?

Д23 Найдите все значения параметра p , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (2 - p)x + y = 2 \\ x + y = 2p. \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение и дайте его графическую иллюстрацию. При каких значениях p это решение есть точка четвертой четверти?

Д24 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых три прямые

$$x + y = 3; \quad 2x - y = a - 5; \quad x + 2y = a$$

проходят через одну и ту же точку. Найдите координаты этой точки.